

Les supports de cours suivants font référence au cours de Mr SOL et à son livre : "Accès à l'université" chez DUNOD

Les supports de cours ne sont pas complets, ils ne contiennent ni les démonstrations, ni certains schémas et exemples vus en cours.

Pour une bonne compréhension du cours, la présence et l'écoute en cours restent vivement conseillés.

Chapitre VIII :

Éléments de calcul

intégral

I. Intégrale d'une fonction continue

1) Primitive et intégrale

A. Primitives, définitions et notation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ouvert de $\mathbb{R}$, la fonction F est une primitive de f si :

- F est définie et dérivable sur I
- $F'(x) = f(x)$ pour tout x de I

Remarque :

Si F est une primitive de f sur un intervalle I , l'ensemble des primitives de f sur I est la famille des fonctions

$$x \mapsto F(x) + c \text{ où } c \in \mathbb{R},$$

on dit que la primitive d'une fonction, si elle existe n'est définie qu'à une constante près. On a donc :

$$\frac{d}{dx}(F(x) + c) = \frac{d}{dx}(F(x)) = f(x)$$

Remarque :

On note $x \mapsto \int f(x)dx$ une primitive quelconque de f , on lit « somme de $f(x)$ », on parle indifféremment de « primitive » ou « d'intégrale indéfinie »

B. Propriétés

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I

C'est une condition suffisante mais non nécessaire, c'est à dire qu'une fonction non continue sur I admette des primitives sur I

Propriétés déduites de la dérivation

Soit un intervalle I , si F est une primitive de f sur I et si G est une primitive de g sur I , on obtient les résultats suivants avec a et $c \in \mathbb{R}$

- $\int a f(x) dx = a \int f(x) dx = F(x) + c$
- $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx = F(x) + G(x) + c$
- $\int a dx = a \int dx = ax + c$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ pour $n \neq -1$
- $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c$ avec $x \in \mathbb{R}^*$

C. Intégrale définie d'une fonction continue

Définition :

Soit F une primitive de la fonction f sur $[a, b]$, on appelle intégrale de a à b de la fonction f , le nombre réel $F(b) - F(a)$,

on note : $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

L'écriture $\int_a^b f(x) dx$ se lit « somme de a à b de $f(x) dx$ »

Remarque

Le nombre $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ ne dépend

- ni de la primitive choisie $[F(x) + c]_a^b = [F(x)]_a^b$
- ni de la variable x $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$

D. Propriété issues de la relation de Chasles

Si a, b et $c \in I$

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

E.Linéarité de l'intégrale

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

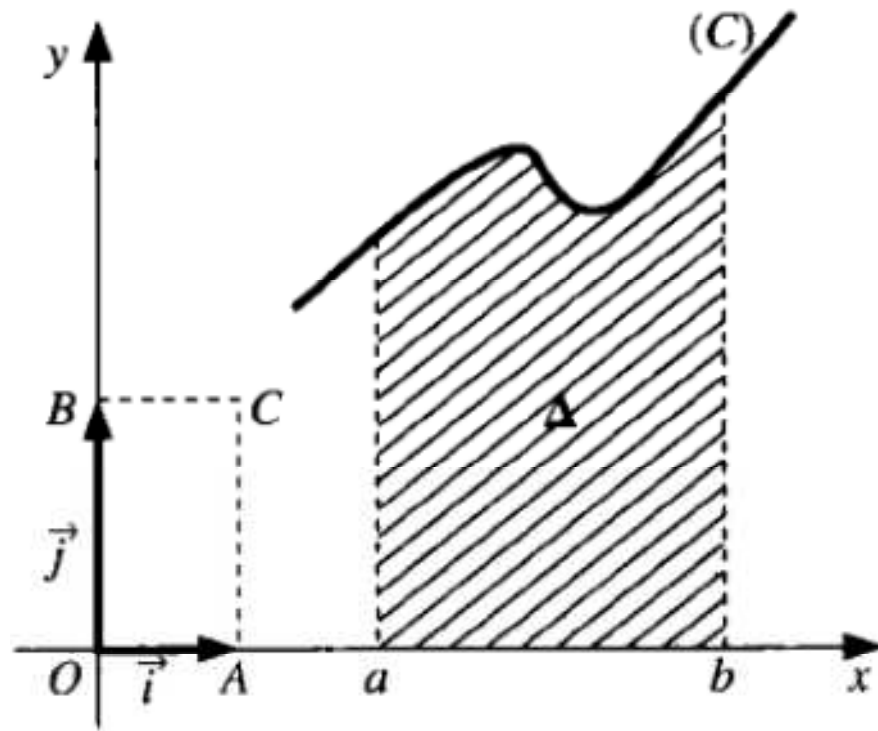
$$\int_a^b \alpha f(x) = \alpha \int_a^b f(x)$$

2) Interprétation graphique (dans le cas d'une fonction positive)

Soit dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C) représentative de la fonction f positive sur $[a, b]$ où $a \leq b$

Soit Δ la partie hachurée du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$,
l'unité d'aire étant $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$

$\int_a^b f(x)dx$ est la mesure de l'aire de Δ



II. Calcul intégral et calcul d'aires

Dans ce chapitre, on considère un repère orthonormé, avec

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$$

A. Aire de Δ partie du plan limitée par la courbe(C) l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$

- Si pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \geq 0$

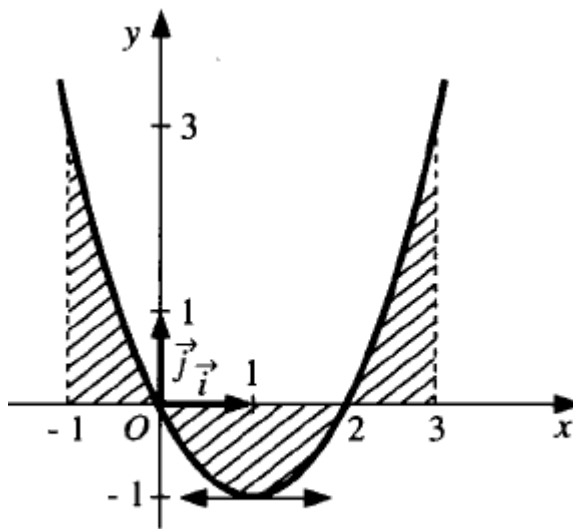
L'aire de Δ est $\int_a^b f(x)dx$

- Si pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \leq 0$

L'aire de Δ est $-\int_a^b f(x)dx$

- Si pour tout x de $[a, b]$, $f(x)$ ne garde pas de signe constant et change de signe pour les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$

L'aire de Δ est $\left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b f(x) dx \right|$



B. Aire d'une partie du plan comprise entre deux courbes

Soit, f et g deux fonctions définies sur $[a,b]$, si pour tout x de $[a,b]$, $f(x) \geq g(x)$, l'aire du domaine délimité par les courbes représentatives de f et g et par les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est égale à

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

III. Intégration

1) A l'aide des primitives usuelles

Pour trouver F , on peut utiliser en « sens inverse » les dérivées usuelles et les propriétés des fonctions dérivables.

On établit le tableau suivant :

$x \mapsto f(x) = \dots$	$x \mapsto F(x) = \dots$	Sur un intervalle
0	c	$\mathbb{R}$
a	ax+c	$\mathbb{R}$
x^n <i>avec $n \neq 1$</i>	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\begin{cases} \mathbb{R} \text{ si } n \in \mathbb{N} \\ \mathbb{R}^* \text{ si } n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\} \\ \mathbb{R}_+^* \text{ si } n \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$	$\mathbb{R}^*$
e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = \dots$	$x \mapsto F(x) = \dots$	Sur un intervalle
$\alpha \cdot u'(x)$	$\alpha \cdot u(x) + c$	Du
$u'(x) \cdot (u(x))^n$	$\frac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + c$	$\begin{cases} Du \text{ si } n \in \mathbb{N} \\ Du \text{ quand } u(x) \neq 0 \text{ si } \\ \quad n \in \mathbb{Z}_+^* - \{-1\} \\ Du \text{ quand } u(x) > 0 \text{ si } \\ \quad n \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z} \end{cases}$
$u'(x) + v'(x)$	$u(x) + v(x) + c$	$Du \cap Dv$
$u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x)$	$u(x) \cdot v(x) + c$	$Du \cap Dv$
$\frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{v^2(x)}$	$\frac{u(x)}{v(x)} + c$	$Du \cap Dv$ avec $v(x) \neq 0$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) + c$	Du avec $v(x) \neq 0$
$u'(x) \cdot e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + c$	Du

2) Intégration par parties

Quand les fonctions u et v sont dérivables sur un intervalle I :

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Cette propriété permet de démontrer la formule d'intégration par parties

Soit les fonctions u et v telles que leurs dérivées u' et v' soient continues sur $[a, b]$, on a :

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx$$