

Les supports de cours suivants font référence au cours de Mr SOL et à son livre : "Accès à l'université" chez DUNOD

Les supports de cours ne sont pas complets, ils ne contiennent ni les démonstrations, ni certains schémas et exemples vus en cours.

Pour une bonne compréhension du cours, la présence et l'écoute en cours restent vivement conseillés.

Chapitre V :

Etude locale d'une fonction

I. Point où la dérivée première existe

1) Tangente en un point, sens de variation

A. *Fonction dérivable ou différentiable en un point*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I , (C) sa courbe représentative sur I , (T) la droite tangente à (C) au point x_0 de I

L'équation de (T) est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

- Quand $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - y) = 0^+$

(C) est au dessus de (T) pour $x \rightarrow x_0$

- Quand $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - y) = 0^-$

(C) est au dessous de (T) pour $x \rightarrow x_0$

$f'(x_0)$ est le coefficient directeur de (T) , on peut donc démontrer que :

- $f'(x_0) \geq 0$ pour tout x de $I \Leftrightarrow f$ est croissante sur I
- $f'(x_0) \leq 0$ pour tout x de $I \Leftrightarrow f$ est décroissante sur I
- $f'(x_0) = 0$ pour tout x de $I \Leftrightarrow f$ est constante sur I

B. Convexité, concavité, point d'inflexion

Si une fonction f est deux fois dérivable sur un intervalle I , et si (C) est sa courbe représentative sur I on peut démontrer que :

- $f''(x_0) \geq 0$ pour tout x de $I \Leftrightarrow (C)$ est au dessus de ses tangentes sur I (f' est croissante sur I), on dit que f est convexe sur I

- $f''(x_0) \leq 0$ pour tout x de $I \Leftrightarrow (C)$ est au dessous de ses tangentes sur I (f' est décroissante sur I), on dit que f est concave sur I
- $f''(x_0) = 0$ avec $x_0 \in I$ et si en même temps, $f''(x)$ change de signe pour $x = x_0$ (C) admet un point d'inflexion en x_0 (C) traverse sa tangente en x_0)

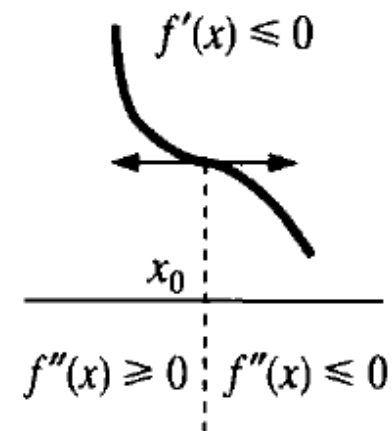
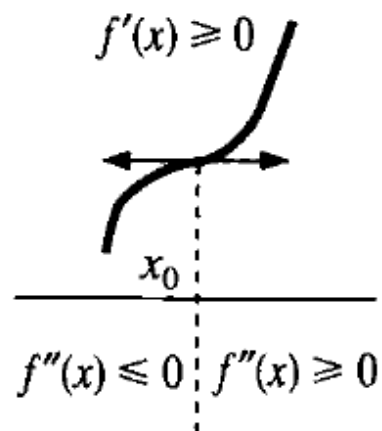
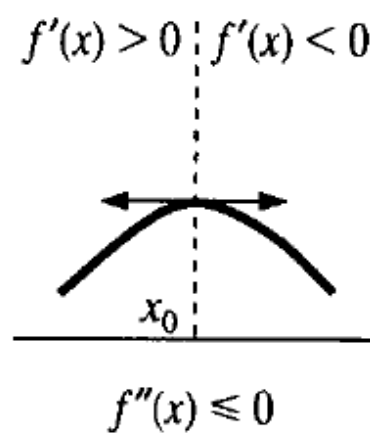
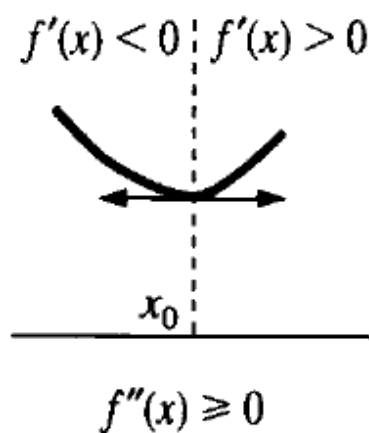
C.Points où la dérivée première s'annule

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un point de I : si x_0 est un extrémum local de f alors
 $f'(x_0) = 0$

Commentaire 1 :

$f'(x_0) = 0$ signifie seulement que x_0 est un point stationnaire, c'est à dire que la tangente à la courbe est parallèle à l'axe des abscisses.

Quand $f'(x_0) = 0$, 4 cas peuvent se présenter :



Commentaire 2 :

Pour qu'il y ait un extrémum, si f est dérivable, il faut que f' s'annule et change de signe (f' s'annule alors que f'' garde un signe constant)

Commentaire 3 :

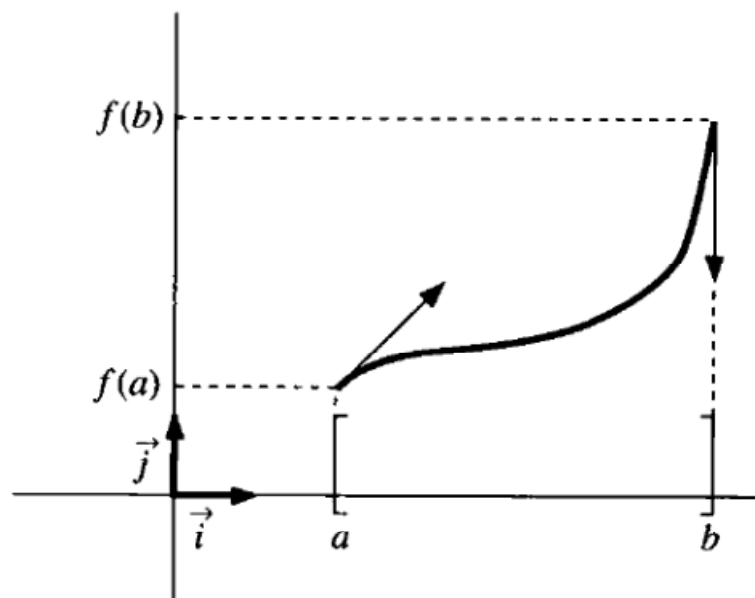
Il doit être ouvert, sur un intervalle fermé, une fonction peut admettre un extrémum en une extrémité x_0 de cet intervalle alors que $f'(x_0) \neq 0$.

Dans l'exemple suivant, $(a, f(a))$ est

un minimum or $f'_a(a) = 1$ et

$(b, f(b))$ est un maximum

or $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(b) = +\infty$



Commentaire 4 :

La réciproque du théorème n'est pas vraie, une fonction peut avoir un extrémum en un point où la dérivée n'existe pas (cas des points anguleux ou de rebroussement)

D. Points où la dérivée seconde s'annule

Si une fonction f est deux fois dérivable sur un intervalle I et si C est sa courbe représentative sur I , on peut démontrer :

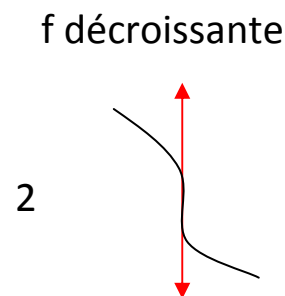
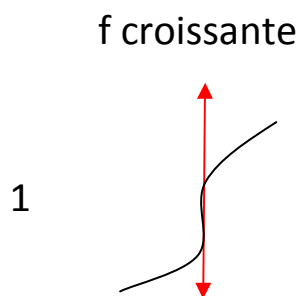
- $f''(x) > 0$ pour tout x de $I \Leftrightarrow (C)$ est au dessus de ses tangentes sur I , (f' est croissante sur) on dit que f est convexe sur I
- $f''(x) < 0$ pour tout x de $I \Leftrightarrow (C)$ est au dessous de ses tangentes sur I , (f' est décroissante sur) on dit que f est concave sur I

- $f''(x_0) = 0$ avec $x_0 \in I$ et si en même temps, $f''(x)$ change de signe pour $x = x_0$, (C) admet un point d'inflexion en x_0 ((C) traverse sa tangente en x_0)

II. Point où la dérivée première n'existe pas

On considère f continue sur I dérivable pour tout x de $I - \{x_0\}$ non dérivable en x_0 . (Cf) la courbe représentative de f sur I .

A. *Point d'inflexion à tangente parallèle à l'axe des abscisses*



$$1. \text{ Soit } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$$

$$2. \text{ Soit } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$$

B. Point anguleux et point de rebroussement

La courbe n'admet pas une tangente en x_0 mais deux demi-tangentes qui forment un angle.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \beta$$

α et β sont des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ avec $\alpha \neq \beta$

Points anguleux

α et β ne sont pas simultanément infinis. L'angle formé par la demi-tangente n'est pas nul

Points de rebroussement

- Soit $\alpha = +\infty$ et $\beta = -\infty$
- Soit $\alpha = -\infty$ et $\beta = +\infty$

III. Branches infinies

1) Cas où $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

La courbe (Cf) admet une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées d'équation $x = a$

2) Cas où $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$

La courbe (Cf) admet une asymptote parallèle à l'axe des abscisses d'équation $y = a$

3) Cas où $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

A. Soit $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$

La courbe (Cf) admet une branche parabolique direction de l'axe des ordonnées

B. Soit $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

La courbe (Cf) admet une branche parabolique direction de l'axe des abscisses

$$C. \text{ Soit } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

$$1^{\text{er}} \text{ cas } \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \infty$$

La courbe (Cf) admet une branche parabolique direction de la droite d'équation $y=ax$

$$2^{\text{eme}} \text{ cas } \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b$$

La courbe (Cf) admet pour asymptote la droite d'équation $y=ax+b$