Les supports de cours suivants font référence au cours de Mr SOL et à son livre : "Accès à l'université" chez DUNOD

Les supports de cours ne sont pas complets, ils ne contiennent ni les démonstrations, ni certains schémas et exemples vus en cours.

Pour une bonne compréhension du cours, la présence et l'écoute en cours restent vivement conseillés.

Chapitre IV :

Théorèmes généraux relatifs aux fonctions dérivables

I. Théorèmes fondamentaux

1) Extrémum d'une fonction dérivable

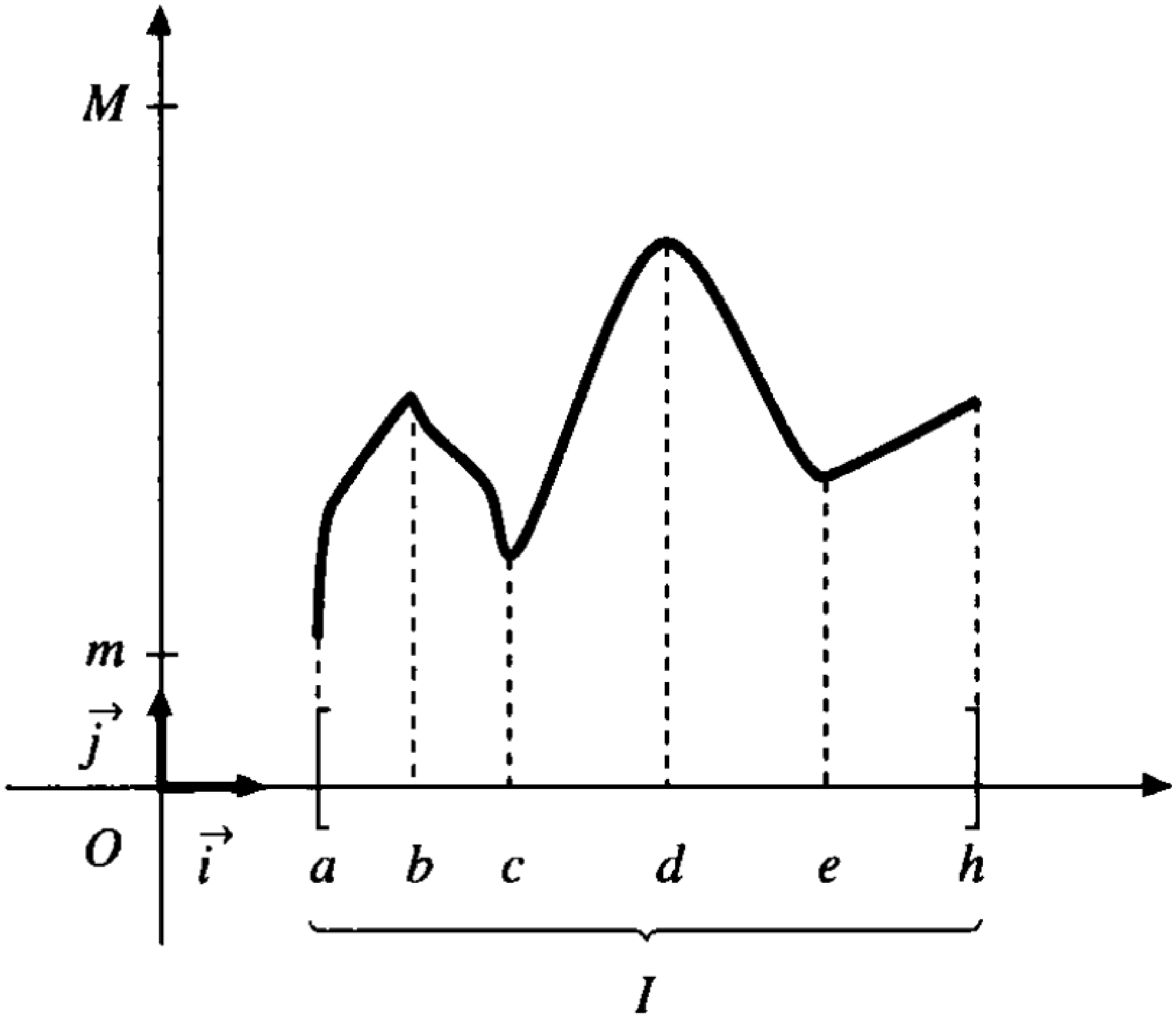
Soit f une fonction f définie sur $D \subset \mathbb{R}$ $et\ x_0 un\ point\ de\ D$

- f admet un maximum absolu, égal à $f(x_0)\ sur\ D\ en\ x_0$, si pour tout $x\ de\ D$, on a $f(x) \leq f(x_0)$
- f admet un minimum absolu, égal à $f(x_0)\ sur\ D\ en\ x_0$, si pour tout $x\ de\ D$, on a $f(x) \geq f(x_0)$

f est dite majorée sur D lorsqu'il existe un nombre réel M tel que $f(x) \leq M$ pour tout x de D

f est dite minorée sur D lorsqu'il existe un nombre réel m tel que $f(x) \geq m$ pour tout x de D

Une fonction à la fois majorée et minorée sur $\boldsymbol{D}$ est dite bornée sur $\boldsymbol{D}$

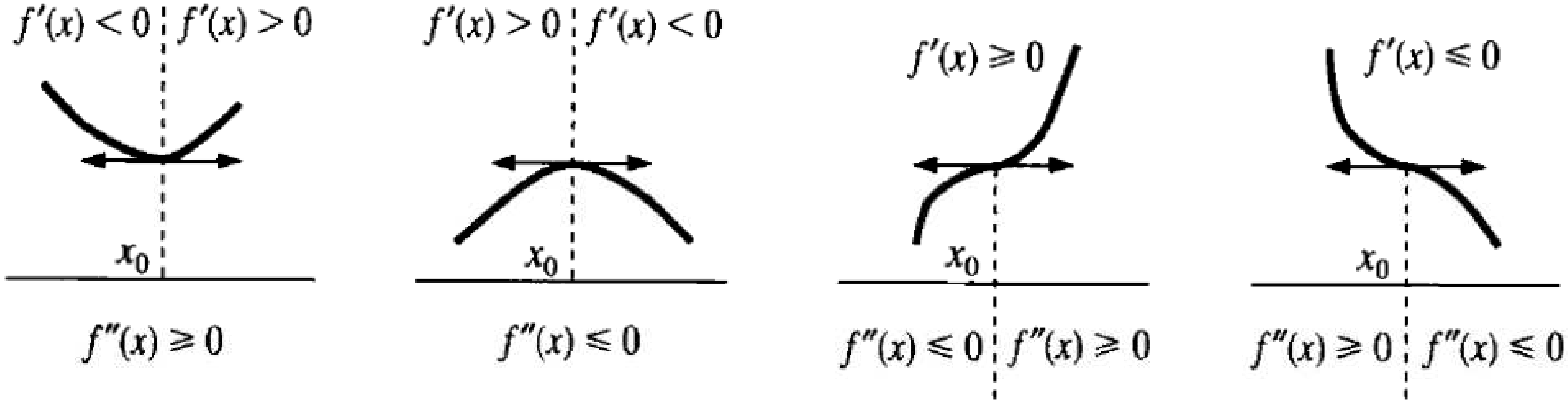

M
m
$\vec{j}$
O
$\vec{i}$
a
b
c
d
e
h
I

Point où la dérivée première s'annule

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert et x_0 un point de I, si x_0 est un extrémum local de f

alors $f'(x_0) = 0$

1. Si $f'(x_0) = 0$, alors la courbe admet une tangente parallèles à l’axe des abscisses



2. Pour qu'il y ait un extrémum, si f est dérivable, il faut que f' **s'annule et change de signe**

3. Il peut y avoir des extrémums alors que f n'est pas dérivable

4. La théorie n'est pas vraie si on prend f dérivable sur un intervalle fermé

2) Théorème de Rolle

Si f est une fonction continue sur un intervalle [a,b] et dérivable sur]a,b[et si en plus $f(a) = f(b)$, il existe au moins un point c de]a,b[tel que $f'(c) = 0$

En effet :

- Si f est constante sur [a,b] sa dérivée est nulle pour tout c de]a,b[

- si f n'est pas constante sur [a,b], elle est bornée et atteint ses bornes sur [a,b], puisqu'elle est continue, elle atteint ses minimums et maximums absolus sur [a,b] ; l'un des deux extrémums au moins n'a pas son abscisse en a et b, et en cet extrémum, la dérivée de f s'annule.

3) Théorème des accroissements finis

En appliquant le théorème de Rolle à la fonction h telle que $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ on démontre le théorème des accroissements finis suivant :

Si f est une fonction continue sur un intervalle [a,b] et dérivable sur]a,b[il existe au moins un point c de]a,b[tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Remarque 1 :

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le taux d'accroissement de f entre $a\ et\ b$ et $f'(c)$ est le coefficient directeur de la tangente en c à la courbe représentative de f

Remarque 2 :

En appliquant le théorème de Rolle à la fonction h telle que

$$h(x) = f(b) - f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(b) - g(x))$$

on démontre le théorème généralisé des accroissements finis suivants. Si f et g sont des fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ avec $g(a) \neq g(b)$, il existe au moins un point c de $]a, b[$ tel que : $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ $avec\ g'(c) \neq 0$

Remarque 3 :

Il résulte de la remarque 2 que si f et g sont deux fonctions dérivables au voisinage d'un point a et si $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x))} = l \; (ou \; l \; peut \; \hat{e}tre \; \infty)$ alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = l$

Cette règle connue sous le nom de règle de l'Hopital est essentiellement utilisée quand $f(a) = g(a) = 0$

II. Formules de Taylor

1) Formule de Taylor avec reste de Young

A partir de la formule

$$f(x_0+h)=f(x_0)+a.h+h.\varepsilon(h) \text{ où } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$$

de la différentiabilité d'une fonction f en x_0 (voir Chap II 1.1) on démontre par récurrence que :

Si f est une fonction de classe C^{n-1} dans un intervalle I, telle que $f^{n}(x_0)$ existe en un point x_0 de I, il existe une fonction $h \to \varepsilon(h)$ définie sur $I - \{x_0\}$ telle que :

$$\boldsymbol{f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1!}f'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{h^n}{n!}\varepsilon(h)}$$

$$\boldsymbol{avec\ \ \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0}$$

Remarque 1 :

Cette formule est appelée formule de Taylor-Young à l'ordre n de f au voisinage de x_0 , son terme $\frac{h^n}{n!}\varepsilon(h)$ est appelé reste de Young

Remarque 2 :

A l'ordre 1, on retrouve la formule établissant la dérivabilité de la fonction f

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h.f'(x_0) + h.\varepsilon(h) \text{ } o\text{ù} \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$$

ou

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0).\varepsilon(h)$$

$$o\text{ù} \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$$

2) Exemple d'utilisation de la formule de Taylor-Young

En posant $x = x_0 + h$, la formule de Taylor-Young s'écrit

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^n}{n!} \varepsilon(h)$$

$$avec \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

La droite d'équation $y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ est la tangente à la courbe représentative de f en x_0

Donc dans le cas où $f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ et $f^n(x_0) \neq 0$

- Si n est pair et $f^n(x_0) > 0$ f est localement connexe pour $x \to x_0$ (courbe au dessus de la tangente)
- Si n est pair et $f^n(x_0) < 0$ f est localement concave pour $x \to x_0$ (courbe au dessous de la tangente)
- Si n est impair f admet un point d'inflexion en x_0 car $(x - x_0)^n$ change de signe autour de x_0

Remarque

Si $f'(x_0) = 0$ le point d'abscisse x_0 est un point stationnaire (tangente parallèle à l'axe des abscisses) et donc :

- Si n est pair et $f^n(x_0) > 0$ f admet un minimum en x_0
- Si n est pair et $f^n(x_0) < 0$ f admet un maximum en x_0
- Si n est impair f admet un point d'inflexion stationnaire en x_0

3) Formule de Mac Laurin

En posant $h = x \ et \ x_0 = 0$ on obtient la formule Mac Laurin avec reste de Young :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^n}{n!} \varepsilon(x)$$

$$avec \ \ \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$