Les supports de cours suivants font référence au cours de Mr SOL et à son livre : "Accès à l'université" chez DUNOD

Les supports de cours ne sont pas complets, ils ne contiennent ni les démonstrations, ni certains schémas et exemples vus en cours.

Pour une bonne compréhension du cours, la présence et l'écoute en cours restent vivement conseillés.

Chapitre III :

Dérivées

I. Dérivée et différentielle en un point

1) Définitions

A. Fonction dérivable ou différentiable en un point

La fonction f définie sur $]x_0-\alpha; x_0+\alpha[\subset \mathbb{R}\ où\ \alpha>0$ est dérivable (différentiable) en x_0 s'il existe un nombre réel a et une fonction ε définie sur $]-\alpha;\alpha[-\{0\}$ tel que

pour tout $h\ de\ ]-\alpha;\alpha[$ on ait :

$$f(x_0+h)=f(x_0)+a.h+h.\varepsilon(h)\ où\ \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0 \qquad (1)$$

A partir de la définition (1)

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + a.h + h.\varepsilon(h) \text{ où } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0 \qquad (1)$$

Si on pose $x = x_0 + h$, on obtient

$$\boldsymbol{f(x) = f(x_0) + a.(x - x_0) + (x - x_0).\varepsilon(x - x_0)} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\boldsymbol{\text{où } \lim_{h \to 0} \varepsilon(x - x_0) = 0}$$

B. *Nombre dérivé*

Dans les formules précédentes, le nombre a s'appelle nombre dérivé de f en x_0, on le note $a = f'(x_0)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0) + (x - x_0).\varepsilon(x - x_0)$$

où $\lim_{h \to 0} \varepsilon(x - x_0) = 0$ (3)

On démontre à partir des formules précédentes que

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Quand cette limite existe, elle est unique, et on dit que f *est dérivable en* x_0

Remarque : le nombre dérivé est par définition le taux d'accroissement de la fonction f au voisinage de x_0

C. Fonction affine tangente

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ $g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ est appelée fonction affine tangente en x_0

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$y = \underbrace{f'(x_0)x}_{} + \underbrace{f(x_0) - f'(x_0)x_0}_{}$$

$$y = \quad ax \quad + \quad b$$

Remarque : $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la droite tangente à la courbe représentative de f en x_0

D. Différentielle en un point

Soit f une fonction dérivable en x_0, on appelle différentielle de f en x_0 le produit noté $df(x_0)$ de $f'(x_0)$par un nombre quelconque h.

On a donc $df(x_0) = f'(x_0) \times h$

h peut varier et donc en tout point x où f est dérivable, on a une fonction différentielle de f :

$h \to df(x) = f'(x).h$ (fonction linéaire, ici, c'est h qui varie)

On a coutume de poser $h = dx$ ce qui nous donne

$$dx \to df(x) = f'(x).dx$$

Donc

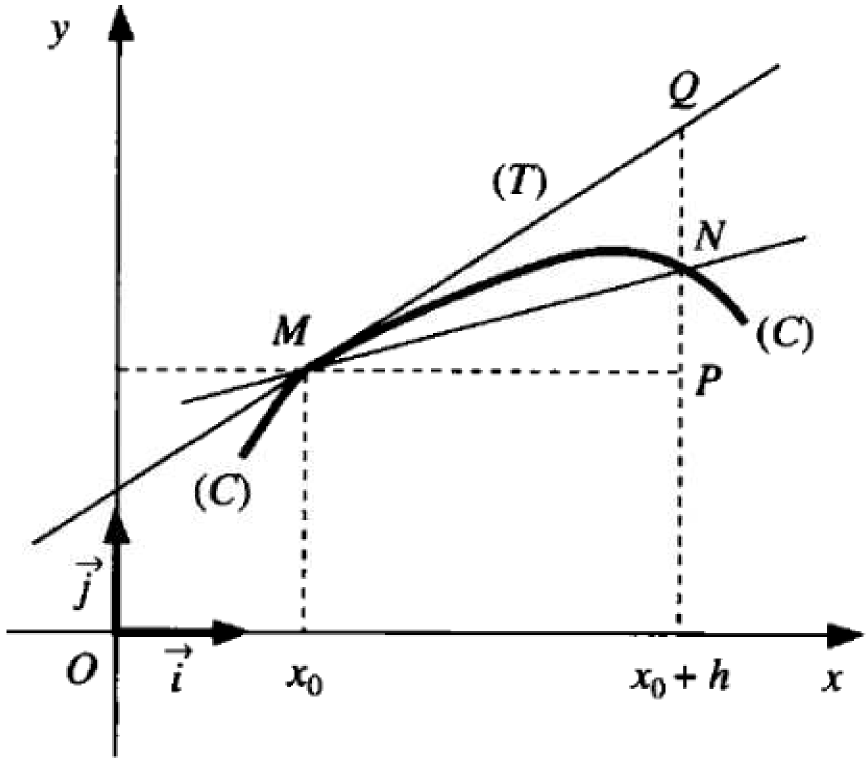
$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} \quad (avec\ y = f(x))$$

2) Interprétation graphique

<u>Accroissement moyen de f entre x et x_0</u>

(taux d'accroissement)

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\overline{PN}}{\overline{MP}}$$

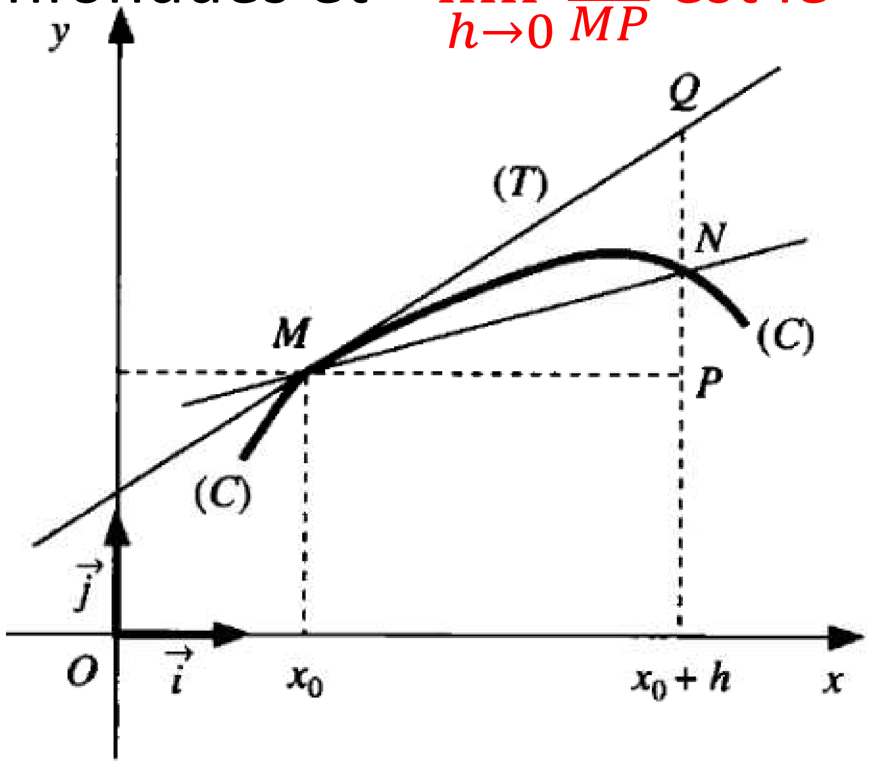


Nombre dérivé de de f en x_0

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\overline{PN}}{\overline{MP}} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{PQ}}{\overline{MP}} \ (car\ si\ h \to 0, Q\ se\ rapproche\ de\ N)$$

(MN) et (T) sont alors presque confondues et $\lim_{h\to 0} \frac{\overline{PQ}}{\overline{MP}}$ est le coefficient directeur de T en x_0



3) Extension de la notion de dérivée

En prenant garde aux domaines de définition, on peut étendre la notion de nombre dérivé en définissant les nombres dérivés à gauche et les nombre dérivés à droite en x_0 .

A. Nombre dérivé à gauche en x_0

Si $\displaystyle \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ **existe**, on la note fréquemment : $f'_g(x_0)$ ou $f'(x_0^-)$ et on l'appelle dérivée, ou **demi-dérivée** de f à gauche en x_0

La courbe représentative de f admet alors une **demi-tangente** à gauche en x_0 de coefficient directeur : $f'_g(x_0)$

Remarque : Si la limite obtenue est $\pm\infty$, on parle de demi dérivée infinie à gauche et de demi tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

B. Nombre dérivé à droite en x_0

Même chose que le paragraphe précédent si $x \to x_0^+$, et on parle de demi-dérivée à droite notée $f'_d(x_0)$

C.Fonctions dérivables en un point et dérivées à droite et à gauche.

On a l'équivalence suivante :

$$(f\ est\ dérivable\ en\ x_0)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(f'_g(x_0)\ etf'_d(x_0)\ exixtent\ et\ f'_g(x_0) = f'_d(x_0)\ )$$

Et évidemment : $f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$

4) Dérivabilité et continuité en un point

Si f est une fonction dérivable en x_0, alors la formule (1) permet d'écrire

$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ donc f est continue en x_0

Une fonction dérivable en un point est continue en ce point

Par contre, une fonction continue n'est pas obligatoirement dérivable.

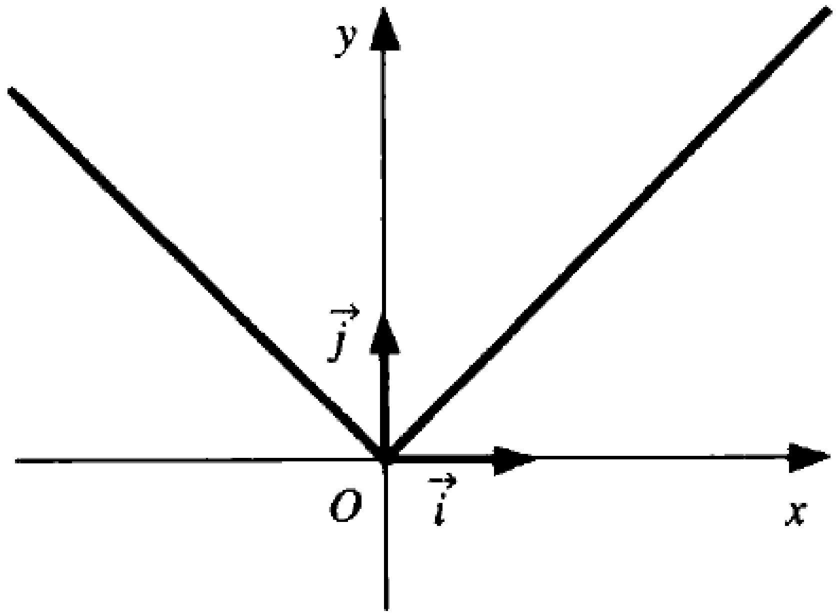
Exemple :

Exemple : *la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = |x|$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0, en effet :*

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

$$f'_g(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1,$$

donc $f'_d(0) \neq f'_g(0)$.



II. Fonction dérivée

1) Dérivabilité sur un intervalle

$$(f\ est\ dérivable\ sur\ ]a, b[\ )$$
$$\Leftrightarrow f\ est\ dérivable\ en\ tout\ point\ x_0\ de\ ]a, b[$$

$$(f\ est\ dérivable\ sur\ [a, b[\ )$$
$$\Leftrightarrow (f\ est\ dérivable\ sur\ ]a, b[\ et\ f'_d(a)\ existe)$$

$$(f\ est\ dérivable\ sur\ ]a, b]) \Leftrightarrow$$
$$(f\ est\ dérivable\ sur\ ]a, b[\ et\ f'_g(b)\ existe)$$

2) Fonction dérivée et dérivées successives

A. *Définitions*

La fonction $f': x \to f'(x) pour\ tout\ x\ de\ I$ est appelée fonction dérivée de $f sur\ I$ et se note $f'\ ou\ \frac{df}{dx}$

Si alors f'est dérivable, sa dérivée est :

$f'': x \to f''(x)$ appelée dérivée seconde de f et notée $f''\ ou\ \frac{d^2f}{dx^2}$

Si on peut dériver f n fois successivement, on obtient la **dérivée n[ième] de f** que l'on note : $\boldsymbol{f^n\ ou\ \frac{d^nf}{dx^n}}$

B. Fonctions de classe C^k

On dit que f est une fonction de classe C^k sur un intervalle ouvert I si elle admet des dérivées continues sur I jusqu'à l'ordre k (on peut la dériver k fois et ses dérivées sont continues).

Quand f est indéfiniment dérivable, on parle de fonction de classe infinie notée C^{∞}

3) Calculs de dérivées

A. Opérations sur les fonctions dérivables

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $f\ et\ g$ sur les intervalles où les dérivées suivantes existent.

$$(\boldsymbol{\alpha})' = \mathbf{0}$$

$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}'$$

$$(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}'.\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}'.\boldsymbol{u}$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$$

B. Dérivée de la fonction $x \to x^n$ avec $n \in \mathbb{R}^*$

$$\boldsymbol{Quand\ x \to x^n\ est\ dérivable\ (x^n)' = \frac{dx^n}{dx} = n.x^{n-1}}$$

On étend la formule sur $\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^*$ à :

Si la fonction $x \to (U(x))^n$ est dérivable :

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}(U(x))^n = n.U(x)^{n-1}.U'(x)}$$

4) Dérivées à droites ou à gauche et fonction dérivée

- Si f est continue sur [a,b] et dérivable sur]a,b[telle que : $\lim_{x \to a^+} f'(x) = l\ (resp. +\infty, -\infty)$ alors $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l\ (resp. +\infty, -\infty)$

- Si f est continue sur [a,b] et dérivable sur]a,b[telle que : $\lim_{x \to b^-} f'(x) = l \ (resp. +\infty, -\infty)$ alors $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = l \ (resp. +\infty, -\infty)$

Remarque : La réciproque de cette théorie n'est pas vraie, une fonction g', dérivée d'une fonction g, peut ne pas avoir de limite en un point x_0 alors que $g'(x_0)$

5) Dérivées de fonctions réciproques

Si une fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} sur un intervalle I et si f est dérivable sur I avec $f'(x) \neq 0$ pour tout x de I alors f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $f(I)$ et on a $(f^{-1})' = \frac{1}{f' 0 f^{-1}}$ donc pour $x \in I\ et\ y \in f(I)$:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{f'(x)}$$

Car $\left(y = f(x)\right) \Leftrightarrow (x = f^{-1}(y))$

Remarque :

Le théorème précédent permet de conclure que f^{-1} est une bijection de $f(I)$ sur I, f^{-1} définie dans $f(I)$ a les mêmes variations que f dans I.

6) L'exemple des fonctions puissance n^{ième} et racine n^{ième}

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+ \ et \ n \in \mathbb{N}^*, \alpha$ est appelé la racine n-ième du nombre réel positif a si $\alpha^n = a$, on note $\alpha = \sqrt[n]{a}$ et on a l'équivalence :

$$\alpha = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^n = a \ avec \ n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{R}_{+\ et} \ \alpha \in \mathbb{R}_+ \\ \alpha = 0 \ si \ a = 0 \ avec \ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Remarque : $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

A. Solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $x^n = a$ où $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

Si $\alpha = 0$ l'équation $\mathrm{x}^{\mathrm{n}} = 0$ admet une seule solution : $x = 0$

Si $\alpha \neq 0$

- Si n est pair
  - Si $\alpha > 0$ l'équation admet deux solutions
    $x_1 = \sqrt[n]{a}\ et\ x_2 = -\sqrt[n]{a}$
  - Si $\alpha < 0$ l'équation n'admet pas de solution
- Si n est impair
  - Si $\alpha > 0$ l'équation admet une solution $x = \sqrt[n]{a}$
  - Si $\alpha < 0$ l'équation admet une solution $x = -\sqrt[n]{a}$

B. Les fonctions $x \to x^n$ où $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ et leurs réciproques

Les fonctions

La fonction $\boldsymbol{x} \to x^n$ où $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^* - \{\mathbf{1}\}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$

- Si n est pair, la fonction est paire, elle réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$ et une bijection de $]-\infty;0$ sur $-\infty;0]$
- Si n est impair, la fonction est impaire, elle réalise une bijection de $]-\infty;+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$

On peut dresser les tableaux suivants

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^n	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

n pair

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^n	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

n impair

Les réciproques

Dans les intervalles où les fonctions suivantes réalisent des bijections, elles définissent une fonction réciproque qui donne ainsi :

- Si n est pair
  - la fonction f de $[0;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$ telle que $\mathrm{f(x) = x^n}$ a pour fonction réciproque la fonction f_1^{-1} de $[0;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$ telle que $\boldsymbol{f_1^{-1} = \sqrt[n]{x}}$
  - la fonction f de $]-\infty;0]$ sur $]-\infty;0]$ telle que $\mathrm{f(x) = x^n}$ a pour fonction réciproque la fonction f_2^{-1} de $]-\infty;0]$ sur $]-\infty;0]$ telle que $\boldsymbol{f_2^{-1} = -\sqrt[n]{x}}$

- Si n est impair la fonction f de $]-\infty;+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$ telle que $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x^n}$a pour fonction réciproque la fonction de $f^{-1}de\ ]-\infty;+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$

  telle que $\boldsymbol{f^{-1} = \sqrt[n]{x}\ si\ x \geq 0\ et\ f^{-1} = -\sqrt[n]{-x}\ si\ x} < 0$

Représentations graphiques