

**Les supports de cours suivants font référence au cours de Mr SOL et à son livre :
"Accès à l'université" chez DUNOD**

**Les supports de cours ne sont pas complets, ils ne contiennent ni les
démonstrations, ni certains schémas et exemples vus en cours.**

**Pour une bonne compréhension du cours, la présence et l'écoute en cours restent
vivement conseillés.**

Chapitre II :

Limites

et continuité

I. Limites et continuité en un point

1) Définitions

A. *Limite en un point (approche intuitive)*

Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$ sauf peut être au point x_0 de I ; si « quand x tout en restant dans I se rapproche du nombre l » on dit que l est la limite de f quand x tend vers x_0 et on note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

Remarque 1 : « x se rapproche de x_0 » signifie que « $|x - x_0|$ devient infiniment petit »

Remarque 2 : $x \rightarrow x_0$ se lit « x tend vers x_0 »

B. Unicité de la limite

Si la limite existe, elle est unique.

C. Continuité en un point

Une fonction f est continue en un point x_0 si, et seulement si,

- f est définie en x_0
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

2) Extensions de définitions

A. *Limite à droite et limite à gauche en un point x_0*

Quand x tend vers x_0 :

- Si « x se rapproche de x_0 » par valeurs décroissantes, on note $x \rightarrow x_0^+$ (ou $x \rightarrow x_0$ avec $x > x_0$)
- Si « x se rapproche de x_0 » par valeurs croissantes, on note $x \rightarrow x_0^-$ (ou $x \rightarrow x_0$ avec $x < x_0$)

On note :

- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ou $\lim_{x > 0} f(x)$

- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ ou $\lim_{x < 0} f(x)$

B. Continuité à droite et continuité à gauche en un point x_0

Une fonction f est continue à droite (resp. à gauche) en x_0 si, et seulement si, f est définie en x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$)

C.Extension pour l'infini

Bien que $+\infty$ et $-\infty$ ne soient pas des nombres réels, la notion de limite peut être étendue pour l'infini et on trouve des écritures de la forme :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

II. Continuité sur un intervalle

1) Définitions

Soit a et b deux réels tels que $a < b$:

- Une fonction f est continue sur $]a, b[$ si, et seulement si f est continue en tout point de $]a, b[$
- Une fonction f est continue sur $[a, b]$ si, et seulement si elle est continue sur $]a, b[$ et continue à droite en a et à gauche en b

Remarque :

Intuitivement, une fonction f est continue sur un intervalle I si sa courbe représentative sur I n'est pas interrompue, si on peut la tracer sans lever le crayon

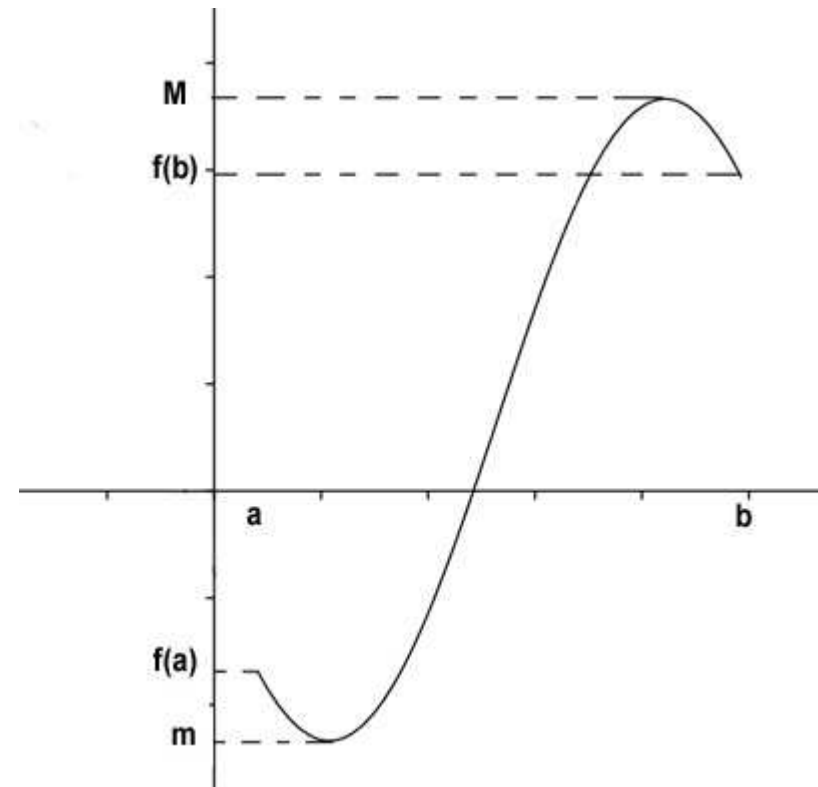
2) Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$

Pour $x \in [a,b]$ on a $m \leq f(x) \leq M$

avec m image minimum de f et

M image maximum de f



Théorème des valeurs intermédiaires :

Si f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et si les images de f appartiennent à l'intervalle $[m,M]$, $f(x)$ prend au moins une fois toute valeur c de $[m,M]$ en particulier :

- Si c est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors il existe un x_0 tel que $f(x_0) = c$
- Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, $f(x)$ s'annule au moins une fois sur $[a,b]$

3) Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie et continue sur $I \subset \mathbb{R}$ sauf au point x_0 de I et telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ou l est un nombre réel, la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ pour tout } x \text{ de } I - \{x_0\} \\ g(x_0) = l \end{cases}$$

est continue sur I et est appelée prolongement par continuité de f en x_0

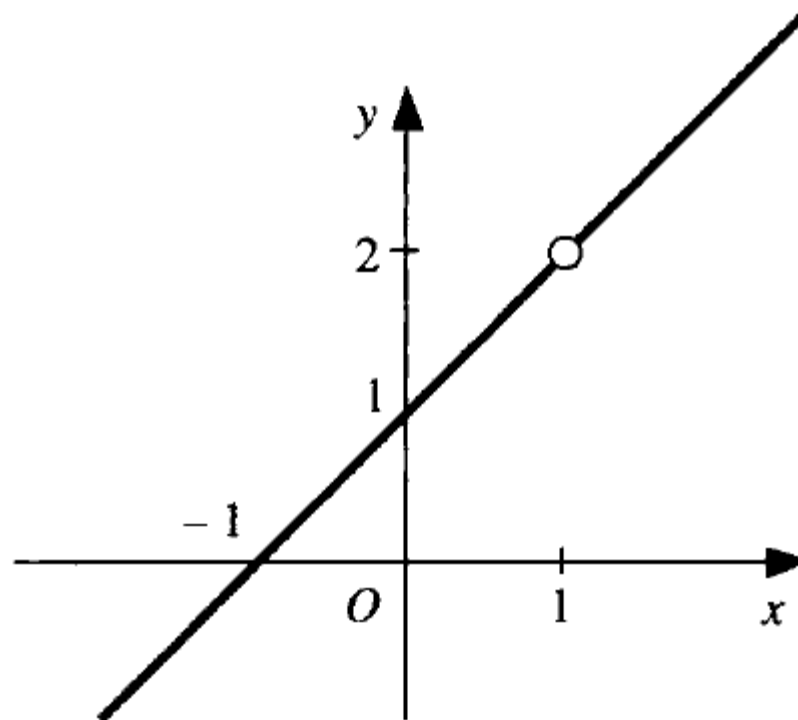
Exemple :

La fonction $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$

Sur ce domaine, $f(x) = x + 1$ donc elle est continue sur $] -\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

f est prolongeable par continuité

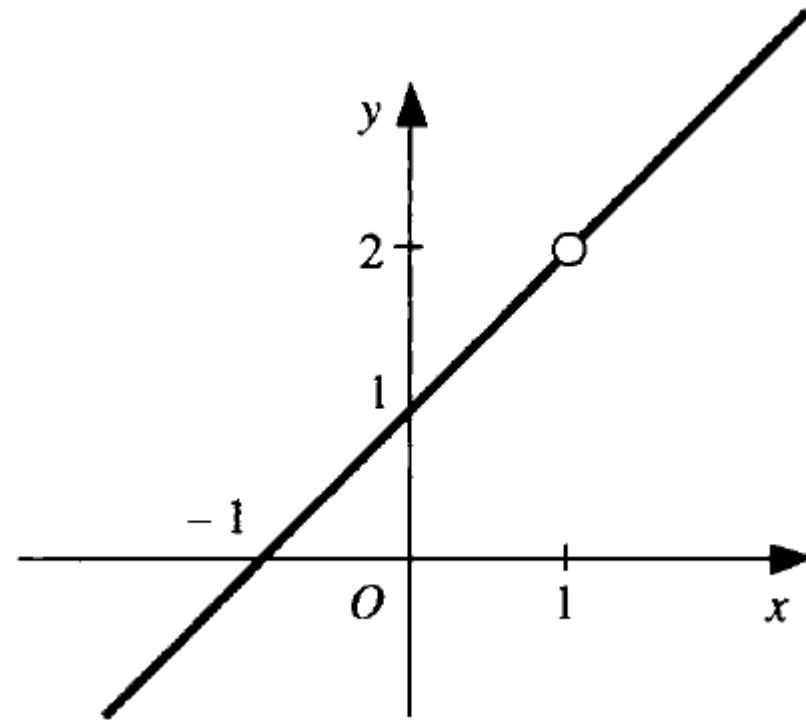
car $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$



La fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} - \{1\} \\ g(1) = 2 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$ et est appelée prolongement
par continuité de f en 1

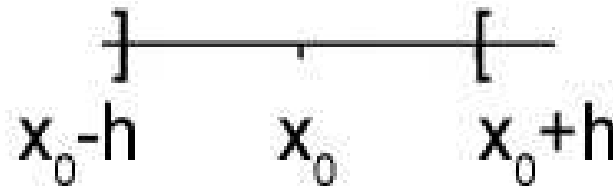


III. Fonctions équivalentes

4) Voisinage

On appelle voisinage d'un point x_0 de $\mathbb{R}$ (resp. de $+\infty$ et $-\infty$) toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]x_0 - h; x_0 + h[$ ou $h > 0$

(resp. $]a; +\infty[$ de la forme $] - \infty; a[$ ou $a \in \mathbb{R}$)



Remarque : Il est possible de prendre « h aussi petit que l'on veut », quand on trouve des phrases du type : « soit f une fonction définie au voisinage de x_0 » cela entend que f est définie dans un petit intervalle autour de x_0

5) Fonctions équivalentes au voisinage

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ ou $x_0 \in \{+\infty; -\infty\}$ et soit f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 , sauf peut-être en x_0 ;

On dit que f et g sont équivalentes quand x tend vers x_0 s'il existe une fonction ε définie au voisinage de x_0 , sauf peut-être en x_0 tel que :

$$f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x)) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Et on note $f \sim_{x_0} g$ (équivalent à g au voisinage de x_0)

Remarque 1 :

Si en plus on a $g(x) \neq 0$ alors $f \sim_{x_0} g \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Remarque 2 :

$f \sim_{x_0} g$ signifie que $f(x)$ et $g(x)$ se ressemblent quand $x \rightarrow x_0$

Remarque 3 :

Si $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$ alors $f_1 \cdot f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 \cdot g_2$

par contre $f_1 + f_2$ n'est généralement pas équivalent à $g_1 + g_2$

et $f_1 \circ f_2$ n'est généralement pas équivalent à $g_1 \circ g_2$

IV. Opérations sur les limites

6) Somme

f	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g	l'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f + g$	$l + l'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	

7) Produit

f	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0
g	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$f \times g$	$l \times l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	

8) Quotient

f	l	l	$l \neq 0$	$0^\pm$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
g	l'	$\pm\infty$	$0^\pm$	$0^\pm$	$0^\pm$	$l \neq 0$	$\pm\infty$
$\frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	0	$\pm\infty$		$\pm\infty$	$\pm\infty$	

9) Formes indéterminées

$(+\infty) + (-\infty)$	On peut souvent lever l'indétermination facilement pour les fonctions polynômes et rationnelles en mettant le terme de plus haut degré en facteur ou plus généralement en appliquant les règles suivantes : • Une fonction polynôme non nulle a le même comportement que son terme de plus haut degré en $+\infty$ <i>et</i> $-\infty$ • Une fonction rationnelle non nulle a le même comportement que le quotient de ses termes de plus haut degré en $+\infty$ <i>et</i> $-\infty$
$0 \times (\pm\infty)$	
$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	
$\frac{0^\pm}{0^\pm}$	

V. Opérations sur les fonctions continues

Si deux fonctions f et g sont continues en x_0 alors :

- $f + g$ est continue en x_0
- $f \times g$ est continue en x_0
- $\frac{f}{g}$ est continue en x_0

Si f est continue sur I et si g est continue sur $f(I)$ alors $g \circ f$ est continue sur I

VI. Bijection, fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

Une fonction f définie sur un intervalle I réalise une bijection de I sur $f(I)$ si et seulement si pour tout y de $f(I)$ il existe un et un seul élément de I tel que $y = f(x)$

Alors une fonction f^{-1} définie sur l'intervalle $f(I)$ réalise une bijection de $f(I)$ sur I .

f^{-1} est appelée fonction réciproque de f sur I .

Remarques :

1. Toute fonction f continue et strictement monotone sur un segment I est une bijection, elle a donc une fonction réciproque f^{-1} sur le segment $f(I)$

2. Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ normé (où $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|$)
 - a. Les courbes d'équation $y = f(x)$ et $x = f^{-1}(y)$ sont les mêmes
 - b. Les courbes d'équation $y = f(x)$ et $y = f^{-1}(x)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice des axes $y = x$
3. En faisant attention aux ensembles de définition, on a
$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x)$$